

SUR LE PRODUIT DE VARIÉTÉS LOCALEMENT FACTORIELLES OU \mathbf{Q} -FACTORIELLES

SAMUEL BOISSIÈRE, OFER GABBER & OLIVIER SERMAN

RÉSUMÉ. Nous démontrons que, sur un corps algébriquement clos, les lieux de factorialité locale et de \mathbf{Q} -factorialité d'une variété sont ouverts, que le produit de variétés localement factorielles est une variété localement factorielle, et que cette propriété reste vraie pour les variétés \mathbf{Q} -factorielles lorsque le corps de base n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini.

INTRODUCTION

Les propriétés de factorialité et de \mathbf{Q} -factorialité locales définissent des variétés algébriques possédant des singularités raisonnables : on sait par exemple que le lieu exceptionnel de toute résolution d'une telle singularité est de codimension pure égale à 1. Néanmoins ces notions ne se comportent pas bien vis-à-vis de la topologie étale : il existe en effet des anneaux locaux factoriels dont le complété ne l'est plus. C'est ainsi le cas de la singularité complexe définie par l'équation $xy + zw + z^3 + w^3 = 0$ (voir [15, p. 104]). D'autres exemples de tels anneaux apparaissent lors de l'étude de certains espaces de modules de faisceaux (par exemple sur \mathbf{P}^2 , voir [5]).

Dans toute la suite nous appelons « variété » tout schéma noethérien intègre, séparé, de type fini sur un corps algébriquement clos \mathbf{k} .

Nous donnons une démonstration des résultats suivants :

Théorème. *Le lieu de factorialité locale d'une variété est ouvert.*

Théorème. *Soient X et Y deux variétés localement factorielles. Le produit $X \times_{\mathbf{k}} Y$ est une variété localement factorielle.*

Ce bon comportement de la factorialité locale est assez inattendu au vu des problèmes rappelés plus haut. Il semblait même nécessaire de recourir à la notion d'anneau local *géométriquement factoriel* pour espérer obtenir de tels énoncés (cf [12, Exposé XIII]).

Ces résultats s'étendent aux variétés localement \mathbf{Q} -factorielles, moyennant pour le second énoncé une hypothèse supplémentaire sur le corps de base \mathbf{k} .

Théorème. *Le lieu de \mathbf{Q} -factorialité d'une variété est ouvert.*

Théorème. *Soient X et Y deux variétés localement \mathbf{Q} -factorielles. Si \mathbf{k} n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini, alors le produit $X \times_{\mathbf{k}} Y$ est une variété localement \mathbf{Q} -factorielle.*

Ce dernier théorème permet en particulier de lever une hypothèse superflue dans le résultat de Fu et Namikawa [7, Theorem 2.2] portant sur l'unicité de la résolution crépante d'un produit de variétés localement \mathbf{Q} -factorielles singulières admettant une résolution crépante dont le diviseur exceptionnel est irréductible.

Bingener et Flenner ont donné dans [2] une démonstration de l'ouverture des lieux factoriel et \mathbf{Q} -factoriel d'un schéma normal excellent admettant une résolution des singularités. Leur démonstration est de nature locale. Nous donnons ici une démonstration valable pour toute variété définie sur un corps algébriquement

clos. En ce qui concerne la question de la stabilité par produit direct, il résulte par exemple de Boutot [3, III.2.14] que le produit d'une variété localement géométriquement factorielle et d'une variété lisse est localement géométriquement factorielle. Nos résultats étendent cet énoncé, pour les variétés définies sur un corps algébriquement clos.

Une variété normale est localement factorielle si et seulement si les notions de diviseurs de Weil et de Cartier coïncident, ce qui revient à dire que tout faisceau divisoriel (voir §2.5) est inversible. On est ainsi amené pour montrer l'ouverture des lieux factoriel ou \mathbf{Q} -factoriel d'une variété normale à étudier le lieu d'inversibilité des faisceaux divisoriels définis sur cette variété. Nous établissons ces résultats en nous appuyant sur diverses propriétés des variétés d'Albanese, qui sont rappelées dans la section 3. Les deux théorèmes concernant la factorialité locale sont démontrés dans les sections 4 et 5, et leurs extensions à la \mathbf{Q} -factorialité font l'objet de la section 6.

1. FACTORIALITÉ ET \mathbf{Q} -FACTORIALITÉ

1.1. Soit X une variété normale. Notons $\mathrm{Cl}(X)$ le groupe des classes de diviseurs de Weil sur X et $\mathrm{Ca}(X)$ le groupe des classes de diviseurs de Cartier sur X . Le morphisme de groupes $\mathrm{Ca}(X) \rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ est injectif d'image l'ensemble des classes de diviseurs de Weil localement principaux. Rappelons que X est dite *localement factorielle* si tous ses anneaux locaux sont factoriels, autrement dit si $\mathrm{Ca}(X) \rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ est un isomorphisme, et *localement \mathbf{Q} -factorielle* si tous ses anneaux locaux sont \mathbf{Q} -factoriels (i.e. si le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{X,x})$ est de torsion pour tout point x), autrement dit si le quotient $\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Ca}(X)$ est de torsion.

1.2. Avec les mêmes hypothèses, notons $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard de X , naturellement isomorphe à $\mathrm{Ca}(X)$ puisque X est intègre. Rappelons que si $U \subset X$ est l'ouvert complémentaire d'un fermé de codimension 2, le morphisme de restriction $\mathrm{Cl}(X) \rightarrow \mathrm{Cl}(U)$ est un isomorphisme. Rappelons le lemme bien connu :

Lemme 1.3. *Soient X une variété normale, et U son ouvert de lissité. Alors X est localement factorielle si et seulement si le morphisme de restriction $\mathrm{Pic}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(U)$ est un isomorphisme.*

2. FAISCEAUX RÉFLEXIFS

2.1. Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur un schéma X . Rappelons que :

- \mathcal{F} est dit *réflexif* si l'application naturelle $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.
- \mathcal{F} est dit *normal* si pour tout ouvert $V \subset X$ et tout fermé $Y \subset V$ de codimension au moins deux, la restriction $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V \setminus Y)$ est bijective.

Nous utiliserons les deux caractérisations suivantes :

Proposition 2.2. [13, Proposition 1.1] *Un faisceau cohérent \mathcal{F} sur un schéma intègre et noethérien X est réflexif si et seulement s'il s'insère, au moins localement, dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

où \mathcal{E} est localement libre et \mathcal{G} est sans torsion.

Proposition 2.3. [13, Proposition 1.6] *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur un schéma intègre et normal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) \mathcal{F} est réflexif;
- (2) \mathcal{F} est sans torsion et normal;
- (3) \mathcal{F} est sans torsion, et pour tout ouvert $W \subset X$ et tout fermé $Y \subset W$ de codimension au moins deux, $\mathcal{F}_W \cong j_*\mathcal{F}_{W \setminus Y}$, où $j: W \setminus Y \hookrightarrow W$ est l'immersion.

Lemme 2.4. *Soient X une variété normale et $j: V \hookrightarrow X$ l'immersion d'un ouvert tel que $\text{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$. Pour tout faisceau localement libre non nul \mathcal{E} sur V , $j_*\mathcal{E}$ est un faisceau réflexif sur X .*

Démonstration. La cohérence de $j_*\mathcal{E}$ résulte de [20, Théorème 9] (ou [12, VIII, Proposition 3.2]) puisque $\text{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$. Il est clair que $j_*\mathcal{E}$ est sans torsion et l'on vérifie aisément qu'il est normal : la restriction $j_*\mathcal{E}(W) \rightarrow j_*\mathcal{E}(W \setminus Y)$ est par définition $\mathcal{E}(W \cap V) \rightarrow \mathcal{E}((W \setminus Y) \cap V) = \mathcal{E}((W \cap V) \setminus (Y \cap V))$ et $Y \cap V$ est de codimension au moins deux dans V . Puisque \mathcal{E} est localement libre, il est réflexif, donc normal en utilisant la proposition 2.3, donc cette restriction est bijective. \square

2.5. Si X est un schéma intègre et normal et $i: U \hookrightarrow X$ l'immersion de son ouvert de lissité, ce qui précède montre qu'on peut définir pour tout diviseur de Weil de D un faisceau réflexif $\mathcal{O}_X(D) = i_*\mathcal{O}_U(D|_U)$ (plus exactement un faisceau divisoriel) : c'est l'*extension réflexive* du fibré inversible sur U associé à D . Pour toute immersion $j: V \hookrightarrow X$ d'un ouvert V contenant U et tout diviseur de Cartier E sur V , si D est une extension de E à X comme diviseur de Weil, la proposition 2.3 montre que $\mathcal{O}_X(D) \cong j_*\mathcal{O}_V(E)$ puisque ces deux faisceaux sont égaux sur U et sont réflexifs. Le fermé de X sur lequel $\mathcal{O}_X(D)$ n'est pas localement libre est donc exactement le lieu où D n'est pas localement principal (i.e. n'est pas de Cartier).

Lemme 2.6. *Soient S un schéma, X un schéma sur S et \mathcal{F} un faisceau cohérent et sans torsion sur X . Soient s un point de S non nécessairement fermé et x un point de X sur $k(s)$. Alors le faisceau \mathcal{F}_s sur la fibre X_s est inversible au point de X_s défini par x si et seulement si \mathcal{F} l'est au point x .*

Démonstration. Supposons que \mathcal{F}_s est localement libre de rang 1 en x . Notons M le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module \mathcal{F}_x et \mathfrak{m}_s l'idéal maximal de S en s . Le $\mathcal{O}_{X_s,x}$ -module $(\mathcal{F}_s)_x$ vaut $(\mathcal{F}_s)_x = M \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \cong M/\mathfrak{m}_s M$ et est localement libre de rang 1. Soit g un élément de M dont la classe engendre $M/\mathfrak{m}_s M$: alors $M = g\mathcal{O}_{X,x} + \mathfrak{m}_s M$. Puisque l'idéal $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X,x}$ est inclus dans l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de $\mathcal{O}_{X,x}$, le lemme de Nakayama assure que M est engendré par g . Comme il est sans torsion, c'est un module libre de rang 1. L'implication réciproque est immédiate. \square

Nous utiliserons ce résultat dans le cas particulier suivant : soient X et Y deux variétés et \mathcal{F} un faisceau réflexif de rang 1 sur $X \times_{\mathbf{k}} Y$; si en un point x de X le faisceau $\mathcal{F}|_{\{x\} \times Y}$ sur Y est localement libre, alors le faisceau \mathcal{F} est inversible en tout point de $\{x\} \times Y$.

3. VARIÉTÉS D'ALBANESE ET DE PICARD

3.1. Soit X une \mathbf{k} -variété projective normale. Nous rappelons dans cette section la construction d'une variété abélienne $P(X)$ qui paramètre l'ensemble $\text{Cl}_a(X)$ des classes d'équivalence linéaire de diviseurs de Weil sur X algébriquement équivalents à zéro. Il est bien connu que la sous-variété réduite associée au schéma de Picard $\text{Pic}^0(X)$ paramétrant les fibrés inversibles algébriquement équivalents à zéro sur X est une variété abélienne dont la variété duale n'est autre que la *variété d'Albanese morphique* $\text{Alb}_m(X)$ de X , qui factorise tout morphisme pointé de X vers une variété abélienne. Il est donc naturel de considérer la *variété d'Albanese* $\text{Alb}(X)$ de X jouissant de la même propriété pour les applications rationnelles (définie par exemple dans [20]). Nous montrons, suivant Lang [16], que sa variété duale $P(X)$ paramètre les classes d'équivalence de diviseurs de Weil algébriquement équivalents à zéro.

Rappelons plus précisément la définition de la variété d'Albanese. Soit a un \mathbf{k} -point lisse de X . L'application d'Albanese $\alpha_X: X \dashrightarrow \text{Alb}(X)$ est l'application

rationnelle pointée universelle pour les applications rationnelles de X vers une \mathbf{k} -variété abélienne envoyant a sur 0 . L'ouvert de définition V_X de cette application contient le lieu lisse U_X de X .

La variété $P(X) = \text{Alb}(X)^\vee$ est une variété de Picard au sens de Lang [16, IV §4]. Nous donnons ici une présentation moderne de ce résultat, en montrant que $P(X)$ représente, dans la catégorie des \mathbf{k} -schémas de type fini réduits, le foncteur P_X^0 associant à S le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés inversibles \mathcal{L} sur $U_X \times S$ tels que $\mathcal{L}|_{\{a\} \times S}$ est trivial et $\mathcal{L}|_{U_X \times \{s\}}$ est algébriquement équivalent à zéro pour tout \mathbf{k} -point s de S .

Notons \mathcal{P} le fibré de Poincaré sur $\text{Alb}(X) \times P(X)$, et \mathcal{E} son image inverse sur $U_X \times P(X)$. Ce fibré définit une transformation naturelle de $P(X)$ vers P_X^0 .

Proposition 3.2. *La variété abélienne $P(X)$ représente la restriction du foncteur P_X^0 à la catégorie des \mathbf{k} -schémas de type fini réduits.*

Démonstration. Cela résulte du critère de représentabilité des foncteurs en groupes abéliens donné par Murre [19, I.6.1], appliqué à la transformation naturelle

$$\alpha: P(X) \longrightarrow P_X^0$$

donnée par \mathcal{E} . Il suffit de vérifier les propriétés (i), (ii), P_4 , P_5 , P_6 et P_7 de (*loc. cit.*) pour les \mathbf{k} -schémas de type fini réduits.

Vérifions d'abord (ii) : l'injectivité de $\alpha(\mathbf{k})$ résulte du fait que l'application d'Albanese α_X engendre $\text{Alb}(X)$, et la surjectivité est une conséquence de [16, VI.1 Lemma 1].

Vérifions (i) : soit H un \mathbf{k} -groupe algébrique (réduit et de type fini sur \mathbf{k}) commutatif et $\beta: H \rightarrow P_X^0$ une transformation naturelle de foncteurs en groupes. D'après le théorème de Chevalley [4], la composante neutre H^0 de H est une extension d'une variété abélienne A par un groupe linéaire connexe L . Puisque L est extension d'un groupe algébrique unipotent par un tore, la restriction de β à L est triviale. On est donc ramené au cas où H est un produit d'un groupe fini et d'une variété abélienne. L'inclusion de H^0 dans H définit alors un fibré sur $U \times H^0$, qui définit à son tour un morphisme $\text{Alb}(X) \rightarrow (H^0)^\vee$, et donc un morphisme $\varphi^0: H^0 \rightarrow P(X)$ tel que $\beta|_{H^0} = \alpha \circ \varphi^0$. D'autre part, l'image d'une section de la projection $H \rightarrow H/H^0$ définit un sous-groupe de $P_X^0(\mathbf{k})$, donc, d'après (ii), un sous-groupe fini de $P(X)$. On en déduit un morphisme $\varphi: H \rightarrow P(X)$ tel que $\beta = \alpha \circ \varphi$.

Les propriétés P_4 et P_5 s'obtiennent par descente fidèlement plate.

Vérifions P_6 : soient T un \mathbf{k} -schéma de type fini réduit et $\xi: T \rightarrow P_X^0$ une transformation naturelle. Cette transformation définit un fibré inversible $\tilde{\mathcal{L}}$ sur $U \times T$. Supposons d'abord T intègre. Soient $\nu: \tilde{T} \rightarrow T$ sa normalisation, et $\tilde{\mathcal{L}}$ l'image inverse de \mathcal{L} sur $U \times \tilde{T}$. Soit enfin $N(\xi)$ l'image par le morphisme de normalisation ν de $\tilde{N}(\xi) = \{\tilde{t} \in \tilde{T} | \tilde{\mathcal{L}}|_{U \times \{\tilde{t}\}} \simeq \mathcal{O}_{U \times \{\tilde{t}\}}\} \subset \tilde{T}$. Puisque le complémentaire de U dans X est de codimension au moins 2, $\tilde{N}(\xi)$ est l'intersection des supports des images directes par la projection $X \times \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ des extensions réflexives de $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$. On vérifie comme dans [18, III §10 p 89] qu'un morphisme $f: T' \rightarrow T$ se factorise par le fermé $N(\xi) \subset T$ si et seulement si $\xi \circ f = 0$. Si T n'est pas intègre, on définit $N(\xi)$ comme la réunion des fermés associés à chacune de ses composantes irréductibles.

Vérifions P_7 : soient C une courbe lisse projective sur \mathbf{k} , $T \subset C$ un ensemble fini de points fermés et $\xi: C \setminus T \rightarrow P_X^0$ une transformation naturelle. Désignons par $\mathcal{O}_X(1)$ un faisceau inversible ample sur X , et par d la dimension de X . D'après [9, Corollary 1.7 & Proposition 2.4], il existe des entiers naturels m_1, \dots, m_{d-1} et des sections h_1, \dots, h_{d-1} de $\mathcal{O}_X(m_1), \dots, \mathcal{O}_X(m_{d-1})$ dont le lieu des zéros est une courbe Y irréductible, lisse, contenue dans U , et pour laquelle l'application naturelle $\text{Alb}(Y) \rightarrow \text{Alb}(U)$ est surjective et de noyau connexe. L'homomorphisme

de restriction $\rho: P_X^0(\mathbf{k}) \rightarrow P_Y^0(\mathbf{k})$ est donc injectif. Mais, le foncteur P_Y^0 étant représentable par le schéma de Picard $\text{Pic}^0(Y)$ de la courbe projective lisse Y , le théorème de Rosenlicht assure que l'application $C \setminus T(\mathbf{k}) \rightarrow P_Y^0(\mathbf{k})$ déduite de ξ possède un module \mathfrak{m} porté par T . Il résulte alors de ce qui précède que \mathfrak{m} est un module pour ξ . \square

Remarque 3.3. Le fibré de Poincaré sur le produit $X \times \text{Pic}^0(X)_{\text{red}}$ convenablement rigidifié définit une application $\text{Pic}^0(X)_{\text{red}} \rightarrow \text{P}(X)$. On obtient par dualité une application $\text{Alb}(X) \rightarrow \text{Alb}_m(X)$, qui est précisément l'application associée au morphisme universel $X \rightarrow \text{Alb}_m(X)$. On en déduit aussitôt que l'application d'Albanese $X \dashrightarrow \text{Alb}(X)$ est partout définie si et seulement si tout diviseur de Weil algébriquement équivalent à zéro est Cartier, donc en particulier si X est localement factorielle.

Lorsque le corps de base \mathbf{k} n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini, ce résultat s'étend aux variétés localement \mathbf{Q} -factorielles. Il résulte en effet de [20, Théorème 6] que le noyau du morphisme $\text{Alb}(X) \rightarrow \text{Alb}_m(X)$ est connexe. S'il est non nul, on en déduit par dualité que le quotient $\text{P}(X)/\text{Pic}^0(X)_{\text{red}}$ est une variété abélienne non triviale, qui contient d'après [6, Theorem 10.1] un point de non-torsion. Un tel point définit un diviseur de Weil sur X qui n'est pas \mathbf{Q} -Cartier : l'application d'Albanese $X \rightarrow \text{Alb}(X)$ est donc partout définie si X est une variété projective localement \mathbf{Q} -factorielle définie sur un corps algébriquement clos qui n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini.

Remarquons qu'il existe des variétés projectives non localement factorielles dont l'application d'Albanese est partout définie. C'est le cas des variétés unirationnelles non localement factorielles, telles que les espaces projectifs à poids singuliers, ou encore les espaces de modules de fibrés G -principaux semi-stables sur une courbe projective de genre $g \geq 2$, pour tout groupe semi-simple simplement connexe G qui n'est pas spécial au sens de Serre (voir [1]).

Plus généralement, on obtient facilement des variétés projectives non localement \mathbf{Q} -factorielles dont l'application d'Albanese est partout définie en considérant certaines variétés toriques (voir [8, §3]).

3.4. Nous appelons ici *groupe de Néron–Severi* de X le groupe $\text{NS}(X) = \text{Cl}(X)/\text{Cl}_a(X)$ des classes d'équivalence algébrique de diviseurs de Weil sur X . Puisque X est normale et projective sur \mathbf{k} , $\text{NS}(X)$ est un groupe de type fini.

Dans le cas où \mathbf{k} n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini, on en déduit :

Corollaire 3.5. *Une variété projective localement \mathbf{Q} -factorielle définie sur un corps algébriquement clos qui n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini est m -factorielle.*

Démonstration. D'après 3.3, tout diviseur de Weil sur X algébriquement équivalent à zéro est Cartier. Puisque le groupe de Néron–Severi $\text{NS}(X)$ est de type fini, il existe un entier m tel que tout diviseur de Weil est m -Cartier. \square

4. OUVERTURE DE LA FACTORIALITÉ LOCALE

Nous notons X^{fact} le *lieu de factorialité locale* d'un schéma X , défini comme l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel. Rappelons que sur un schéma intègre et localement factoriel, tout faisceau réflexif de rang un est inversible (voir [13, Proposition 1.9]). Plus généralement :

Lemme 4.1. *Soient X une variété normale et U son ouvert de lissité. Le lieu de factorialité locale de X est le lieu sur lequel l'extension réflexive de tout fibré inversible sur U reste localement libre.*

Théorème 4.2. *Le lieu de factorialité locale d'une variété est ouvert.*

Démonstration. Soit X une variété définie sur un corps \mathbf{k} . Puisque le lieu des points où X est normale est ouvert d'après [10, §6.13], on peut supposer X normale. La question étant locale, on peut supposer que X est affine. Soit \overline{X} l'adhérence de X dans un espace projectif. Puisque X est normale, elle se plonge comme un ouvert dans la normalisée \overline{X}^ν de \overline{X} . On peut donc finalement supposer que X est projective sur \mathbf{k} .

Première étape. Soient U l'ouvert de lissité de X , a un point de U fixé et $\alpha_X: (X, a) \dashrightarrow (\text{Alb}(X), 0)$ l'application pointée universelle. Notons V son ouvert de définition, qui contient U , et $j: V \hookrightarrow X$ l'immersion. Soit \mathcal{P} le fibré de Poincaré sur $\text{Alb}(X) \times \mathbf{P}(X)$. Considérons les morphismes

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbf{P}(X) & \xrightarrow{\alpha_X \times \text{id}} & \text{Alb}(X) \times \mathbf{P}(X) \\ j \times \text{id} \downarrow & & \\ X \times \mathbf{P}(X) & & \end{array}$$

et posons

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (\alpha_X \times \text{id})^* \mathcal{P} \in \text{Pic}(V \times \mathbf{P}(X)), \\ \mathcal{L} &= (j \times \text{id})_* \mathcal{E}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.4, \mathcal{L} est un faisceau réflexif.

Soient W l'ouvert de $X \times \mathbf{P}(X)$ sur lequel \mathcal{L} est localement libre et Z son complémentaire. Par la projection $\pi: X \times \mathbf{P}(X) \rightarrow X$, l'image $W_0 = \pi(W)$ est un ouvert de X ; posons aussi $Z_0 = \pi(Z)$. Le fermé Z ne contient aucune composante irréductible d'une fibre au-dessus d'un point de W_0 : en effet, ces fibres sont irréductibles et l'intersection avec W y définit des ouverts non vides. Au point générique η de W_0 , la restriction \mathcal{L}_η de \mathcal{L} à $\{\eta\} \times \mathbf{P}(X)$ est un faisceau réflexif car le changement de base $\{\eta\} \hookrightarrow W_0$ est plat : c'est donc un faisceau inversible en codimension 1. D'après le lemme 2.6, la trace de Z sur la fibre en η est donc de codimension au moins 2. Le théorème de Ramanujam-Samuel [11, 21.14.3 (ii)] (ou [3, III.1.6]) s'applique alors, concluant que la paire $(W_0 \times \mathbf{P}(X), Z \cap (W_0 \times \mathbf{P}(X)))$ est parafactorielle. Il en résulte que l'application de restriction $\text{Pic}(W_0 \times \mathbf{P}(X)) \rightarrow \text{Pic}((W_0 \times \mathbf{P}(X)) \setminus (Z \cap (W_0 \times \mathbf{P}(X))))$ est surjective. Puisque \mathcal{L} est localement libre sur $(W_0 \times \mathbf{P}(X)) \setminus Z \subset W$, il définit un faisceau inversible sur $W_0 \times \mathbf{P}(X)$, qui n'est autre que la restriction de \mathcal{L} à cet ouvert d'après la proposition 2.3. Cela montre que $Z_0 = X \setminus W_0$. Autrement dit, le lieu Z où \mathcal{L} n'est pas localement libre est l'image réciproque du fermé Z_0 de X par la projection π , soit $Z = Z_0 \times \mathbf{P}(X)$, et on a $Z_0 \subset X \setminus V$.

Réciproquement, le fibré \mathcal{L} étant localement libre sur $(X \setminus Z_0) \times \mathbf{P}(X)$, par propriété universelle de $\widehat{\mathbf{P}(X)}$, il existe un unique morphisme

$$(X \setminus Z_0) \xrightarrow{f} \widehat{\mathbf{P}(X)} = \text{Alb}(X)$$

tel que $f^* \mathcal{P} \cong \mathcal{L}|_{(X \setminus Z_0) \times \mathbf{P}(X)}$. Par la propriété universelle de la variété d'Albanese, α_X est donc défini au moins sur $X \setminus Z_0$, donc $X \setminus Z_0 \subset V$. Finalement on a $Z_0 = X \setminus V$ (i.e. $W_0 = V$), donc l'ouvert de liberté locale de \mathcal{L} est exactement $V \times \mathbf{P}(X)$.

Deuxième étape. Puisque \mathcal{L} est réflexif, on peut recouvrir $X \times \mathbf{P}(X)$ par une famille d'ouverts W_1, \dots, W_n au-dessus desquels la restriction de \mathcal{L} s'insère dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}|_{W_i} \rightarrow \mathcal{F}_{W_i} \rightarrow \mathcal{G}_{W_i} \rightarrow 0$$

où \mathcal{F}_{W_i} est localement libre sur W_i et \mathcal{G}_{W_i} sans torsion (d'après la proposition 2.2). Il existe un ouvert non vide Ω de $P(X)$ au-dessus duquel chacun des faisceaux \mathcal{G}_{W_i} est plat. Pour tout diviseur de Weil D sur X algébriquement équivalent à zéro et tel que $[D] \in \Omega$, on obtient alors sur chaque $(X \times [D]) \cap W_i$ des suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{L}|_{(X \times [D]) \cap W_i} \rightarrow (\mathcal{F}_{W_i})|_{(X \times [D]) \cap W_i} \rightarrow (\mathcal{G}_{W_i})|_{(X \times [D]) \cap W_i} \rightarrow 0$$

où $(\mathcal{F}_{W_i})|_{(X \times [D]) \cap W_i}$ est localement libre et $(\mathcal{G}_{W_i})|_{(X \times [D]) \cap W_i}$ sans torsion. Le faisceau $\mathcal{L}|_{X \times [D]}$ est donc réflexif sur X . Par ailleurs, les isomorphismes $\mathcal{L}|_{U \times [D]} \cong \mathcal{E}|_{U \times [D]} \cong \mathcal{O}_U(D|_U)$ sur $U \times [D]$ entraînent, avec la proposition 2.3, que $\mathcal{L}|_{X \times [D]}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(D)$. La restriction du faisceau \mathcal{L} à toute fibre générique est l'extension réflexive du fibré inversible correspondant. Puisque \mathcal{L} est localement libre exactement sur $V \times P(X)$, l'ouvert d'inversibilité du faisceau réflexif $\mathcal{O}_X(D)$ est exactement V pour tout $[D] \in \Omega$ d'après le lemme 2.6. Puisque Ω engendre $P(X)$, on en déduit que tout diviseur de Weil sur X algébriquement équivalent à zéro est localement libre sur V . De plus, pour tout point $x \in X \setminus V$ il existe $[D] \in P(X)$ tel que $\mathcal{O}_X(D)$ n'est pas localement libre en x .

Troisième étape. Soient D_1, \dots, D_r des générateurs du groupe de Néron–Severi de X , et V_1, \dots, V_r les ouverts où ces diviseurs de Weil sont localement principaux. Tout diviseur de Weil D sur X est donc localement principal sur l'ouvert $V \cap V_1 \cap \dots \cap V_r$, et, pour tout point extérieur, il existe un diviseur de Weil sur X qui n'y est pas localement principal. De manière équivalente, cet ouvert est le lieu où l'extension réflexive de tout fibré en droites sur U est localement libre : d'après le lemme 4.1, c'est le lieu de factorialité locale X^{fact} de X . \square

4.3. Dans le cas où la variété normale X est projective sur \mathbf{k} , la démonstration précédente montre en particulier que le lieu de factorialité locale X^{fact} est contenu dans le lieu de définition de l'application d'Albanese V_X (la troisième étape donne d'ailleurs une description très précise de X^{fact}). Si X est localement factorielle, l'application d'Albanese $\alpha_X : X \dashrightarrow \text{Alb}(X)$ est donc définie sur X toute entière.

On en déduit le résultat suivant pour une variété non nécessairement projective (cf 3.3) :

Corollaire 4.4. *Soit X une \mathbf{k} -variété localement factorielle. Alors toute application rationnelle $X \dashrightarrow A$ de X vers une variété abélienne A est définie sur X toute entière.*

5. LIEU DE FACTORIALITÉ LOCALE D'UN PRODUIT

Théorème 5.1. *Soient X et Y deux variétés normales. Le lieu de factorialité locale de $X \times Y$ est le produit des lieux de factorialité locale de X et de Y .*

Démonstration. La question étant locale, on peut, comme dans la démonstration du théorème 4.2, supposer que X et Y sont projectives sur \mathbf{k} .

Fixons deux k -points lisses $a \in X$ et $b \in Y$. Nous notons U_X et U_Y les ouverts de lissité de X et Y , et V_X et V_Y les ouverts de définition de leurs applications d'Albanese α_X et α_Y . Rappelons que $X \times_{\mathbf{k}} Y$ est normale (d'après [11, 6.14.5]), $U_{X \times Y} = U_X \times U_Y$, et $\text{Alb}(X \times Y) \cong \text{Alb}(X) \times \text{Alb}(Y)$ de telle sorte que $V_{X \times Y} = V_X \times V_Y$.

Soit $L \in \text{Pic}(U_{X \times Y})$, que l'on décompose sous la forme

$$L \cong p_X^* L_1 \otimes p_Y^* L_2 \otimes M$$

où p_X, p_Y sont les projections respectives de $U_X \times U_Y$ sur U_X et U_Y , $L_1 \in \text{Pic}(U_X)$, $L_2 \in \text{Pic}(U_Y)$ et $M \in \text{Pic}(U_{X \times Y})$ est tel que les restrictions $M|_{\{a\} \times Y}$ et $M|_{X \times \{b\}}$ sont triviales. Au diviseur de Weil associé à l'extension réflexive de M à $U_X \times Y$ correspond un morphisme pointé naturel $f_M : U_X \rightarrow P(Y)$, donc un morphisme

$\phi_M: \text{Alb}(X) \rightarrow \text{P}(Y)$ d'après la proposition 3.2. Par la propriété universelle de $\text{P}(Y)$, ce morphisme correspond à un fibré en droites N sur $\text{Alb}(X) \times \text{Alb}(Y)$. Tous ces morphismes apparaissent dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
U_X \times U_Y & \xrightarrow{f_M \times \text{id}} & \text{P}(Y) \times U_Y & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha_Y|_{U_Y}} & \text{P}(Y) \times \text{Alb}(Y) \\
& \searrow \alpha_X|_{U_X} \times \text{id} & \uparrow \phi_M \times \text{id} & & \uparrow \phi_M \times \text{id} \\
& & \text{Alb}(X) \times U_Y & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha_Y|_{U_Y}} & \text{Alb}(X) \times \text{Alb}(Y)
\end{array}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}
M &= (f_M \times \text{id})^*(\text{id} \times \alpha_Y|_{U_Y})^* \mathcal{P}_{\text{Alb}(Y)}, \\
N &= (\phi_M \times \text{id})^* \mathcal{P}_{\text{Alb}(Y)}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_{\text{Alb}(Y)}$ désigne le fibré de Poincaré sur $\text{Alb}(Y) \times \text{P}(Y)$ (après permutation des facteurs). On réalise ainsi M comme image réciproque du fibré inversible N sur $\text{Alb}(X) \times \text{Alb}(Y)$, ce qui implique que l'extension réflexive de M à $X \times Y$ est localement libre sur $V_X \times V_Y$.

Notons par ailleurs W_1 et W_2 les ouverts respectifs de X et Y sur lesquels les extensions réflexives de L_1 et L_2 sont localement libres. L'extension réflexive du fibré L est donc localement libre sur l'intersection de $V_X \times V_Y$ avec $W_1 \times W_2$. Mais, d'après 4.3, cette intersection contient $X^{\text{fact}} \times Y^{\text{fact}}$. D'après le lemme 4.1, cela signifie que $(X \times Y)^{\text{fact}}$ contient $X^{\text{fact}} \times Y^{\text{fact}}$. La réciproque est immédiate. \square

Corollaire 5.2. *Le produit de variétés localement factorielles est une variété localement factorielle.*

Remarque 5.3. Si X et Y sont des variétés normales et projectives sur \mathbf{k} , l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 5.1 montre que $\text{Cl}(X \times Y) \cong \text{Cl}(X) \times \text{Cl}(Y) \times \text{Hom}(\text{Alb}(X), \text{P}(Y))$. On peut en déduire le résultat suivant, dont nous ne connaissons pas de démonstration directe :

Corollaire 5.4. *Soient A et B deux algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos \mathbf{k} . Si A et B sont factorielles, alors leur produit tensoriel $A \otimes_{\mathbf{k}} B$ est encore factoriel.*

Démonstration. On peut à nouveau plonger $\text{Spec } A$ et $\text{Spec } B$ dans des variétés projectives normales X et Y . Puisque $\text{Cl}(A) = 0$, on a que $\text{Cl}(X)$ est de type fini : il est engendré par les diviseurs de Weil D_1, \dots, D_r contenus dans le bord $X \setminus \text{Spec } A$. On en déduit que la variété d'Albanese $\text{Alb}(X)$ est triviale. De même, $\text{Cl}(Y)$ est de type fini, engendré par des diviseurs E_1, \dots, E_s , et $\text{Alb}(Y)$ est triviale. On obtient ainsi que $\text{Cl}(X \times Y)$ est exactement la somme $\text{Cl}(X) \oplus \text{Cl}(Y)$. Mais $\text{Cl}(\text{Spec}(A \otimes_{\mathbf{k}} B))$ est un quotient de $\text{Cl}(X \times Y) / \langle D_1 \times Y, \dots, D_r \times Y, X \times E_1, \dots, X \times E_s \rangle$. Puisque $\text{Cl}(X) / \langle D_1, \dots, D_r \rangle$ et $\text{Cl}(Y) / \langle E_1, \dots, E_s \rangle$ sont triviaux, il en est de même de $\text{Cl}(\text{Spec}(A \otimes_{\mathbf{k}} B))$, et $A \otimes_{\mathbf{k}} B$ est donc factoriel. \square

6. GÉNÉRALISATION À LA \mathbf{Q} -FACTORIALITÉ

On étend dans cette section les résultats précédents aux variétés localement \mathbf{Q} -factorielles. Cela nécessite une étude plus fine du comportement de la formation de l'extension réflexive de \mathcal{E} à $X \times \text{P}(X)$ vis à vis des changements de base $T \rightarrow \text{P}(X)$.

Théorème 6.1. *Soit X une variété définie sur un corps algébriquement clos. Alors le lieu de \mathbf{Q} -factorialité de X est ouvert.*

Démonstration. Il suffit à nouveau de démontrer le résultat lorsque X est normale et projective sur \mathbf{k} . Soient a un point rationnel de l'ouvert de lissité U de X , $\text{Alb}(X)$ la variété d'Albanese associée, V l'ouvert de définition de l'application d'Albanese

$X \dashrightarrow \text{Alb}(X)$ et \mathcal{E} le fibré sur $V \times P(X)$ image inverse par $\alpha_X \times \text{id}$ du fibré de Poincaré sur $\text{Alb}(X) \times P(X)$.

Lorsque \mathbf{k} est la clôture algébrique d'un corps fini, $\text{Alb}(X)$ est de torsion. Cela signifie que tout diviseur de Weil algébriquement équivalent à zéro est \mathbf{Q} -Cartier. Soient des générateurs D_1, \dots, D_r du groupe de Néron–Severi de X , et V'_1, \dots, V'_r les ouverts sur lesquels ces diviseurs sont localement \mathbf{Q} -Cartier. Le lieu de \mathbf{Q} -factorialité est alors l'intersection $V'_1 \cap \dots \cap V'_r$.

Supposons maintenant que \mathbf{k} n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini.

On construit tout d'abord une partition finie de $P(X)$ en sous-schémas localement fermés lisses irréductibles $P(X) = \coprod P_i$ tels que, pour tout i , la formation de l'image directe par l'immersion ouverte $U \rightarrow X$ de la restriction \mathcal{E}_i de \mathcal{E} à $U \times P_i$ commute à tout changement de base $T \rightarrow P_i$.

On a vu que la réflexivité de l'extension réflexive $\mathcal{L} = (i \times \text{id})_* \mathcal{E}$ assure l'existence d'un recouvrement ouvert $X \times P(X) = \bigcup W_i$ du produit $X \times P(X)$ tel que sur chaque W_i la restriction $\mathcal{L}|_{W_i}$ de \mathcal{L} à W_i s'insère dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}|_{W_i} \rightarrow \mathcal{F}_{W_i} \rightarrow \mathcal{G}_{W_i} \rightarrow 0$$

où \mathcal{F}_{W_i} est localement libre et \mathcal{G}_{W_i} sans torsion, et que le théorème de platitude générique fournit un ouvert Ω de $P(X)$ tel que la formation de l'image directe par $U \times \Omega \rightarrow X \times \Omega$ de la restriction de \mathcal{E} à $U \times \Omega$ commute à tout changement de base $T \rightarrow \Omega$. On peut de plus supposer Ω lisse.

Soit alors Y le schéma réduit associé à une composante irréductible du sous-schéma fermé $P(X) \setminus \Omega$. On obtient de la même manière, en considérant la restriction du faisceau localement libre \mathcal{E} au produit de U et de l'ouvert de lissité de Y , un ouvert lisse de Y ayant la propriété attendue. On en déduit par récurrence noethérienne la partition $P(X) = \coprod P_i$ annoncée.

En particulier, si \mathcal{L}_i désigne l'extension réflexive de \mathcal{E}_i à $X \times P_i$, le faisceau divisoriel $\mathcal{O}_X(D)$ associé à un point $[D]$ de $P(X)$ appartenant à l'image de P_i s'obtient comme la restriction $\mathcal{L}_i|_{X \times [D]}$ du faisceau \mathcal{L}_i à $X \times [D]$.

Considérons le sous-ensemble

$$\Sigma = \{(x, [D]) \in X(\mathbf{k}) \times P(X)(\mathbf{k}) | \mathcal{O}_X(D) \text{ est inversible au point } x\}$$

de l'ensemble des \mathbf{k} -points du produit $X \times P(X)$. C'est une partie constructible, puisque sa trace sur chaque partie $X \times P_i$ est ouverte : en effet, le faisceau réflexif \mathcal{L}_i est, d'après le théorème de Ramanujam–Samuel (voir la deuxième étape de la démonstration de 4.2), inversible sur un ouvert de la forme $V_i \times P_i$, où V_i est un ouvert de X , et le lemme 2.6 montre alors que $\Sigma \cap (X \times P_i)$ est exactement $V_i \times P_i$.

Considérons maintenant la projection de Σ sur X . Sa fibre A_x au-dessus d'un point fermé $x \in X$ forme un sous-groupe constructible de l'ensemble des \mathbf{k} -points de la variété abélienne $P(X)$. C'est donc un sous-groupe fermé de $P(X)$.

L'ouvert de définition V de l'application d'Albanese $X \dashrightarrow \text{Alb}(X)$ est le lieu des points auxquels tout diviseur de Weil algébriquement équivalent à zéro est inversible. C'est donc exactement le lieu des points x de X tels que $A_x = P(X)$.

Nous montrons que c'est aussi le lieu où tout diviseur de Weil algébriquement à zéro est \mathbf{Q} -Cartier. Soit en effet x un point fermé de $X \setminus V$. La variété abélienne $P(X)/A_x$ n'est alors pas triviale, et contient donc un \mathbf{k} -point qui n'est pas de torsion (d'après [6, Theorem 10.1]). Un relèvement de ce point à $P(X)$ définit un diviseur de Weil algébriquement équivalent à zéro qui n'est pas \mathbf{Q} -Cartier en x .

Soient des générateurs D_1, \dots, D_r du groupe de Néron–Severi de X , et V'_1, \dots, V'_r les ouverts sur lesquels ces diviseurs sont localement \mathbf{Q} -Cartier. Le lieu de \mathbf{Q} -factorialité est alors l'intersection $V \cap V'_1 \cap \dots \cap V'_r$. \square

Remarque 6.2. On peut donner une démonstration beaucoup plus courte de ce résultat lorsque X est une variété projective normale complexe. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 4.2. L'intersection $\bigcap_{m \geq 1} m^{-1}\Omega$ dans $P(X)$ des images inverses de l'ouvert Ω par la multiplication $m: P(X) \rightarrow P(X)$ est dense, comme intersection dénombrable d'ouverts denses. Il existe donc un diviseur de Weil D dont tout multiple mD est inversible exactement sur V . On peut alors conclure comme précédemment.

On obtient une généralisation du corollaire 4.4 (cf. 3.3) :

Corollaire 6.3. *Soit X une variété localement \mathbf{Q} -factorielle définie sur un corps algébriquement clos qui n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini. Alors toute application rationnelle $X \dashrightarrow A$ de X vers une variété abélienne est définie sur X toute entière.*

Remarque 6.4. La conclusion du corollaire précédent est également vraie pour toute variété complexe X projective normale à singularités rationnelles (cf. [14, Lemma 8.1] ; il suffit que X admette une résolution $f: Y \rightarrow X$ vérifiant $R^1 f_* \mathcal{O}_Y = 0$). Remarquons qu'il existe des variétés localement \mathbf{Q} -factorielles à singularités non rationnelles : la singularité décrite par Mumford dans [17, p. 16] est une singularité elliptique \mathbf{Q} -factorielle.

Théorème 6.5. *Soient X et Y deux variétés algébriques définies sur un corps algébriquement clos \mathbf{k} qui n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini. Alors le lieu de \mathbf{Q} -factorialité du produit direct $X \times_{\mathbf{k}} Y$ est le produit des lieux de \mathbf{Q} -factorialité de X et Y .*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 5.1, le point étant que sous l'hypothèse faite sur \mathbf{k} le lieu de définition du morphisme d'Albanese coïncide avec le lieu de \mathbf{Q} -factorialité des diviseurs algébriquement équivalents à zéro sur X . \square

Remarque 6.6. Lorsque \mathbf{k} est la clôture algébrique d'un corps fini, ce résultat tombe en défaut. Considérons en effet une cubique plane lisse $E \subset \mathbf{P}^2$, C le cône affine correspondant, et \overline{C} la fermeture projective de ce cône dans \mathbf{P}^3 . Le groupe des classes de diviseurs de Weil de ce cône projectif est alors isomorphe à $\text{Cl}(E)$, autrement dit à $\hat{E} \times \mathbf{Z}$, tandis que son groupe de Picard est isomorphe au facteur égal à \mathbf{Z} . Puisque \hat{E} est de torsion, \overline{C} est une variété localement \mathbf{Q} -factorielle. On a par ailleurs $\text{Alb}(\overline{C}) = E$, donc le groupe des classes de diviseurs $\text{Cl}(\overline{C} \times_{\mathbf{k}} \overline{C})$ s'identifie à $\text{Cl}(\overline{C}) \times \text{Cl}(\overline{C}) \times \text{Hom}(E, \text{Pic}^0(E)) \simeq \hat{E}^2 \times \mathbf{Z}^2 \times \text{Hom}(E, \hat{E})$, et $\text{Pic}(\overline{C} \times_{\mathbf{k}} \overline{C})$ à $\text{Pic}(\overline{C}) \times \text{Pic}(\overline{C}) \simeq \mathbf{Z}^2$. Puisque $\text{Hom}(E, \hat{E})$ contient $\text{NS}(E) \simeq \mathbf{Z}$, le produit $\overline{C} \times_{\mathbf{k}} \overline{C}$ n'est pas localement \mathbf{Q} -factoriel. Le diviseur de Weil sur $\overline{C} \times_{\mathbf{k}} \overline{C}$ associé à la polarisation principale est le diviseur Δ défini comme l'image inverse de la diagonale $E \subset E \times E$: c'est un exemple de diviseur dont aucun multiple n'est localement principal.

6.7. Soit X une \mathbf{k} -variété normale. Il résulte de la démonstration du théorème 6.1 que X admet une partition en sous-espaces localement fermés $X = \coprod Z_i$ sur lesquels le groupe des classes de diviseurs $\text{Cl}(\mathcal{O}_{X,x})$ ne dépend pas du point $x \in Z_i$.

Cette démonstration a également la conséquence suivante : si \mathbf{k} n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini, alors le groupe des classes de diviseurs $\text{Cl}(\mathcal{O}_{X,x})$ d'un point $x \in X$ est de torsion si et seulement s'il est fini. On en déduit le :

Corollaire 6.8. *Soit A une algèbre locale normale essentiellement de type fini sur un corps algébriquement clos qui n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini. Alors le groupe des classes de diviseurs $\text{Cl}(A)$ de A est de torsion si et seulement s'il est fini.*

RÉFÉRENCES

1. A. Beauville, Y. Laszlo, and C. Sorger, *The Picard group of the moduli of G -bundles on a curve*, Compositio Math. **112** (1998), no. 2, 183–216.
2. J. Bingener and H. Flenner, *Variation of the divisor class group*, J. Reine Angew. Math. **351** (1984), 20–41.
3. J.-F. Boutot, *Schéma de Picard local*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 632, Springer, Berlin, 1978.
4. B. Conrad, *A modern proof of Chevalley’s theorem on algebraic groups*, J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), no. 1, 1–18.
5. J.-M. Drézet, *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur \mathbf{P}_2* , Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1273, Springer, Berlin, 1987, pp. 337–362.
6. G. Frey and M. Jarden, *Approximation theory and the rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **28** (1974), 112–128.
7. B. Fu and Y. Namikawa, *Uniqueness of crepant resolutions and symplectic singularities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 1, 1–19.
8. W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.
9. O. Gabber, *On space filling curves and Albanese varieties*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 6, 1192–1200.
10. A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 24.
11. ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1967), no. 32.
12. ———, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Documents Mathématiques (Paris), 4, Société Mathématique de France, Paris, 2005, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962. Revised reprint of the 1968 French original.
13. R. Hartshorne, *Stable reflexive sheaves*, Math. Ann. **254** (1980), no. 2, 121–176.
14. Y. Kawamata, *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces*, J. Reine Angew. Math. **363** (1985), 1–46.
15. ———, *Crepan blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 1, 93–163.
16. S. Lang, *Abelian varieties*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. No. 7, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.
17. D. Mumford, *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 9, 5–22.
18. ———, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
19. J. P. Murre, *On contravariant functors from the category of pre-schemes over a field into the category of abelian groups (with an application to the Picard functor)*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1964), no. 23, 5–43.
20. J.-P. Serre, *Morphismes universels et variétés d’albanese*, Variétés de Picard, Sém. C. Chevalley 3 (1958/59), No.10, 1960.

LABORATOIRE J.A.DIEUDONNÉ UMR CNRS 6621, UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS,
PARC VALROSE, F-06108 NICE
E-mail address: Samuel.Boissiere@unice.fr

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES, LE BOIS-MARIE, 35, ROUTE DE CHARTRES,
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
E-mail address: gabber@ihes.fr

LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ UMR CNRS 8524, UNIVERSITÉ LILLE 1, CITÉ SCIENTIFIQUE,
F-59655 VILLENEUVE-D’ASCQ CEDEX
E-mail address: Olivier.Serman@math.univ-lille1.fr